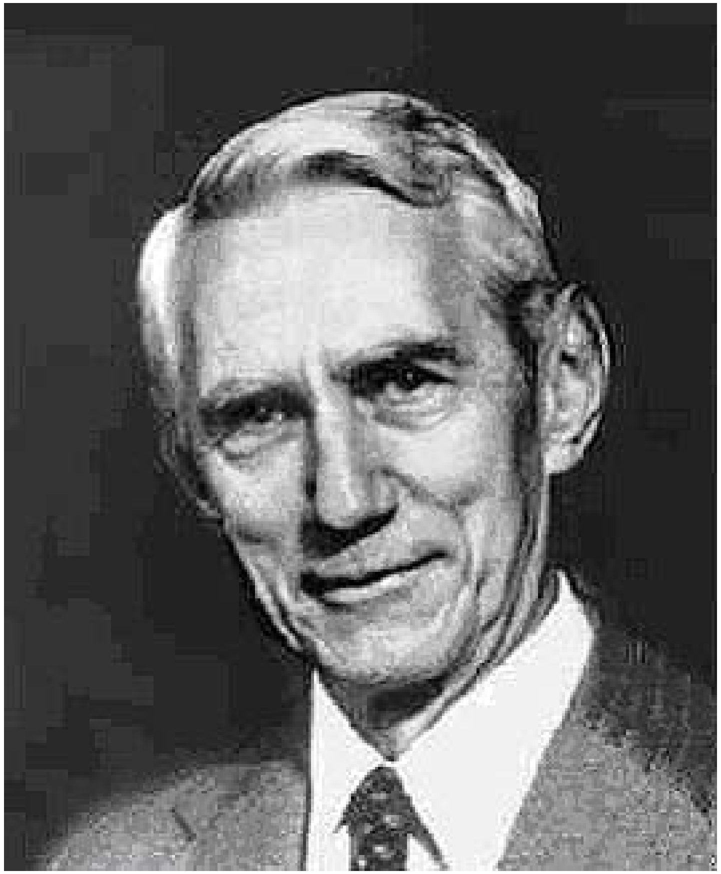
# Claude E. Shannon



# Vladimir Kotelnikov

Vol. 7 No. 1 – February/March 2004

IEEE region8news

The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 445 Hoes Lane, Piscataway, NJ 08855

http://www.ieee.org/r8 http://www.ieee.org/r8

## IEEE Life Fellow Honored by Russia's President Putin

A ceremony in honor of Academician Vladimir Kotelnikov on his 95th birthday was marked on September 12, 2003 by a Session of the Institute of Radio-engineering & Electronics (IRE) of the Russian Academy of Science. Prof. Kotelnikov is considered the Dean of the Russian communication scientists and engineers as well as the elder statesman of Russian communication technology.

Russian president Vladimir Putin sent greetings: *"Prof. Kotelnikov has the right to be recognized as the Corphæus of Russian science. Your outstanding research contributions together with your fruitful teaching and state activity are invaluable and brought you deserved authority and respect."*

Kotelnikov received the highest Russian award: "Order of Merit to the Motherland of the 1st grade" for his outstanding achievements in the development of Russian science and for long term creative activity.

IEEE President Michael Adler and IEEE Past President Joel Snyder greeted Prof. Kotelnikov on behalf of the IEEE Board of Directors and all IEEE members around the world: "Today we honor the birthday of an engineering and scientific giant who has contributed in vast measure to modern communication theory and sets an example for each of us who aspire to improve our world." Kotelnikov, an active member of the Executive Committee of the IEEE Russia Section, was awarded the IEEE Alexander Graham Bell Medal "for fundamental contribution to signal theory" in 2000.

*Vladimir Kotlelnikov, age 95 (second left), is congratulated by Prof. Leonid Varakin, Joel Snyder and Michael Adler*

*Contributed by Heinrich Lantsberg*

# *Câteva limite fundamentale in telecomunicații*

Curs festiv, an 5, promoția 2004

9 iunie 2004

# Introducere

- Ieşirea unei surse discrete este o variabilă aleatoare *S* ce ia valori in alfabetul finit

$$S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}\}$$

cu probabilitățile $P(S = s_k) = p_k$

- Cantitatea de informație câştigată după producerea evenimentului $S=s_k$

$$I(s_k) = \log_2 \frac{1}{p_k} = -\log_2 p_k \geq 0.$$

pentru $p_k = 0.5$, $I(s_k) = 1 \text{ bit}$

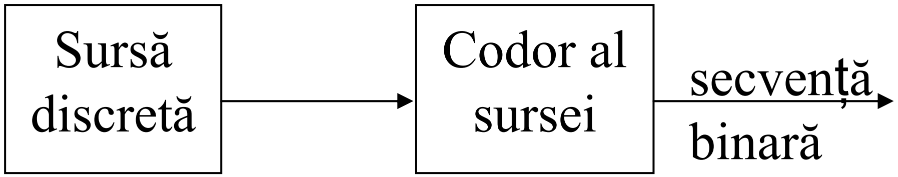
# Introducere

- Entropia sursei discrete având alfabetul *S*

$$H(S) = E\{I(s_k)\} = \sum_{k=0}^{K-1} p_k \log_2 \frac{1}{p_k} [\text{biti}]$$

  *S* este o etichetă a sursei şi nu un argument.
- Ieşirile sursei, $s_k$, sunt convertite în grupuri de cifre binare $b_k$, având lungimea $l_k$ biți oarecare

# Introducere




- Lungimea medie a cuvintelor de cod de la ieşirea codorului este:

$$\bar{L} = \mathrm{E}\{l_k\} = \sum_{k=0}^{K-1} p_k l_k . \quad \text{[biti/simbol]}$$

# Teorema 1-a a lui Shannon

- Fiind dată o sursă discretă cu entropia *H(S)*, lungimea medie a cuvintelor de cod *L*, pentru orice schemă de codare fără distorsiuni satisface inegalitatea

$$\overline{L} \geq H(S)$$

- Eficiența codării sursei $\eta$ se defineşte prin

$$\eta = \frac{H(S)}{\overline{L}}$$

# Canale discrete

- Un canal discret este simbolizat în figură

$$\mathcal{X}\left\{\begin{array}{c} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_{J-1} \end{array}\right. \quad \mathrm{X} \to \boxed{p\left(y_k \mid x_j\right)} \to Y \quad \left.\begin{array}{c} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{K-1} \end{array}\right\}\mathcal{Y}$$

- descris de cele 2 alfabete, $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{Y}$ şi de probabilitățile de tranziție

$$p\left(y_k \mid x_j\right) = P\left(Y = y_k \mid X = x_j\right)$$

# Entropie

- Entropia condiționată de $Y = y_k$

$$H(\mathcal{X} \mid Y = y_k) = \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j \mid y_k) \log_2 \frac{1}{p(x_j \mid y_k)}$$

- Entropia condiționată

$$H(\mathcal{X} \mid \mathcal{Y}) = \mathrm{E}\{H(\mathcal{X} \mid Y = y_k)\} = \sum_{k=0}^{K-1} p(y_k) H(\mathcal{X} \mid Y = y_k)$$

$$H(\mathcal{X} \mid \mathcal{Y}) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j, y_k) \log_2 \frac{1}{p(x_j \mid y_k)}$$

# Entropie

- Entropia $H(X \mid Y)$ = incertitudinea rămasă cu privire la intrarea canalului, după ce ieşirea a fost observată.
- Dar $H(X)$ este incertitudinea privind intrarea canalului înainte de observarea ei, aşa ca
$$I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y)$$
este incertitudinea rezolvată (ridicată) după observarea ieşirii canalului.
- $I(X;Y)$ este o informaţie mutuală.

# Capacitatea canalului

- Capacitatea canalului discret este maximul informației mutuale, $I(X;Y)$ în oricare utilizare singulară, maximizarea fiind făcută în raport cu toate distribuțiile $\{p(x_j)\}$ posibile pentru $X$

$$C = \max_{\{p(x_j)\}} I(X;Y) \quad \text{[biti/utilizare]}$$

# Canal binar simetric

1.

$$\begin{cases} p(y_0 \mid x_1) = p(y_1 \mid x_0) = p; & p(x_0) = \alpha \\ p(y_0 \mid x_0) = p(y_1 \mid x_1) = 1 - p; & p(x_1) = 1 - \alpha \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} p(x_0, y_0) = p(y_0 \mid x_0)\, p(x_0) = (1 - p)\alpha \\ p(x_0, y_1) = p(y_1 \mid x_0)\, p(x_0) = p\alpha \\ p(x_1, y_0) = p(y_0 \mid x_1)\, p(x_1) = p(1 - \alpha) \\ p(x_1, y_1) = p(y_1 \mid x_1)\, p(x_1) = (1 - p)(1 - \alpha) \end{cases}$$

# Canal binar simetric

3.

$$I(\mathcal{X};\mathcal{Y}) = (1-p)\alpha\log_2\frac{1-p}{(1-p)\alpha+p(1-\alpha)} + p\alpha\log_2\frac{p}{(1-p)(1-\alpha)+p\alpha}$$

$$+p(1-\alpha)\log_2\frac{p}{(1-p)\alpha+p(1-\alpha)} + (1-p)(1-\alpha)\log_2\frac{p}{(1-p)(1-\alpha)+p\alpha}$$

4.

$$\frac{dI(\mathcal{X};\mathcal{Y})}{d\alpha} = 0$$

conduce la $\alpha = 0.5$ şi deci

# Canal binar simetric

$$C = \underset{\{0.5\ \ 0.5\}}{I}(X;Y) = 1 + p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)$$

5. a) Dacă canalul nu este afectat de zgomot, adică p = 0 se atinge capacitatea C = 1 bit / o utilizare.

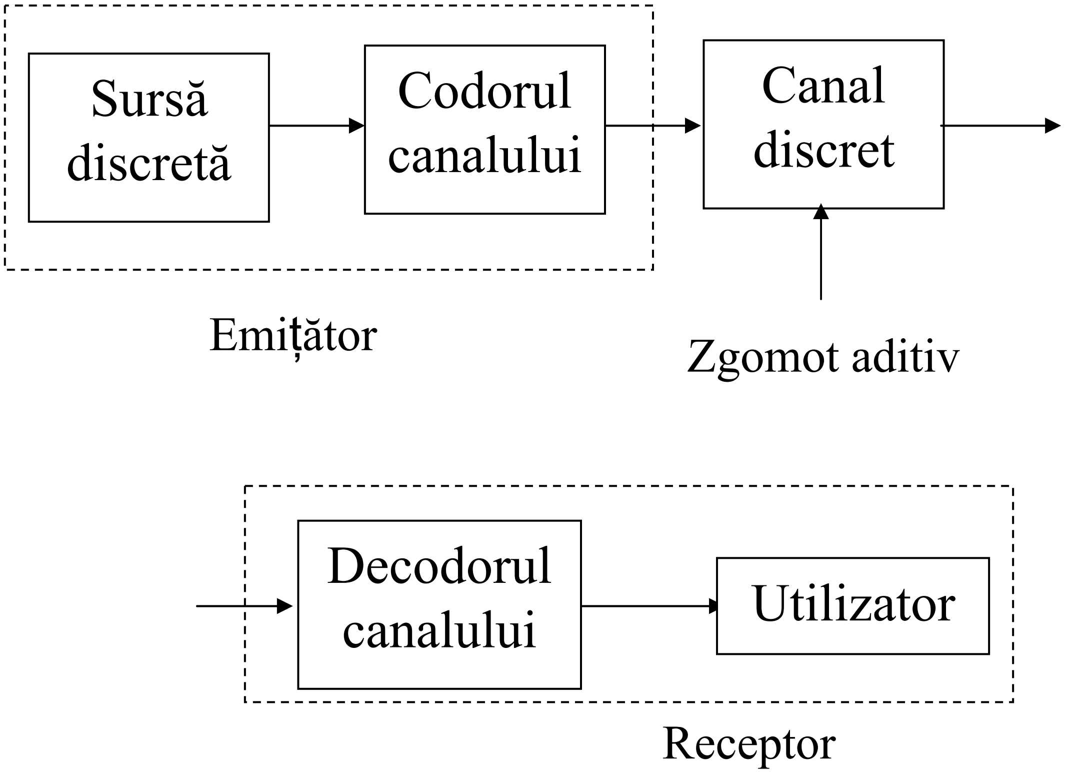
   b) Dacă canalul este afectat de un zgomot puternic, încât p = 0.5 capacitatea este C = 0 bit / o utilizare. Canalul nu poate fi utilizat.

# Teorema a doua a lui Shannon

- Pentru creşterea imunităţii comunicaţiei la efectele zgomotului se codează canalul
- Blocurile de *k* biţi emişi de sursă se transformă în blocuri de lungime *n*, *n* > *k* biţi. Rata codului este:

$$r = \frac{k}{n} < 1.$$

# Teorema a doua a lui Shannon



# Enunțul teoremei

- Sursa-> entropia H(*S*) biți/simbol, emite simboluri cu durată *Ts*. Fiecare utilizare a canalului durează *Tc*,

$$T_c \geq T_S$$

- Teorema 2:
- 1. Utilizând canalul astfel încât $$\frac{H(S)}{T_S} \leq \frac{C}{T_C}$$

  există o schemă de codare pentru care ieşirea sursei poate fi transmisă prin canal şi poate fi reconstruită la ieşire cu o probabilitate aleasă în mod arbitrar, oricât de mică
- 2. Utilizând canalul astfel încât $$\frac{H(S)}{T_S} > \frac{C}{T_C}$$

  un sistem transmite informația prin canal cu o probabilitate de eroare oricât de mică.

# Capacitatea canalului

- Pe lângă entropie şi capacitatea canalului este o limită fundamentală în transmiterea informației.
- Dar $r = T_C / T_S$ aşa că este necesar să transmitem cu o rată inferioară capacității canalului pe o transmisie

$$r \leq C$$

# Surse şi canale continue

- Dacă X este o v.a. de la intrarea canalului cu densitatea de probabilitate $p_X(x)$ se defineşte entropia ei diferențială

$$h(X)=\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\log_2 \frac{1}{p_X(x)}dx$$

Pentru o v.a. cu repartiție gaussiană

$$h(X)=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \log_2 \sqrt{2\pi\sigma}\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\log_2 e dx$$

# Surse şi canale continue

- Sau $h(X)=\frac{1}{2}\log_2\left(2\pi e\sigma^2\right)$
- Informația mutuală între două v.a. X şi Y

$$I(X;Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int p_{X,Y}(x,y)\log_2\frac{p_X(x|y)}{p_X(x)}dxdy$$

- Entropia diferențială condiționată a v.a. X fiind dată Y se defineşte cu

$$h(X|Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int p_{X,Y}(x,y)\log_2\frac{1}{p_X(x|y)}dxdy$$

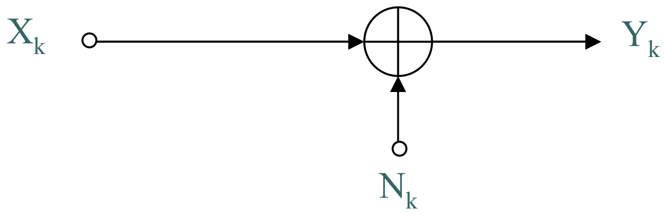
# Teorema capacităţii informaţionale

- Fie un canal gaussian de bandă W [Hz] prin care se transmite procesul X(t), şi el de bandă limitată la W. Procesul X(t) se eşantionează cu frecvenţa Nyquist, 2W eşantioane/sec. Se prelevează K eşantioane cu valori continue $X_k$, k=1,2,…,K. Durata procesului transmis este T aşa că se preiau:

$$K = T \cdot 2W \text{ eşantioane}$$

# Teorema capacităţii informaţionale

- Eşantioanele $X_k$ se transmit prin canal şi sunt afectate aditiv de eşantioanele de zgomot $N_k$:




Puterea transmisă este limitată:

$$E\left\{X_k^2\right\} = P \qquad [\text{Watt}]$$

Capacitatea informaţională a canalului:

$$C = \max_{\left\{P_{X_k}(x)\right\}} \{I(X_k;Y_k) : E\{X^2\} = P\}$$

# Teorema capacității informaționale

- Avem însă $I(X_k;Y_k)=h(Y_k)-h(Y_k/X_k)$

  şi $h(Y_k/X_k)=h(X_k+N_k/X_k)=h\left(N_k\right)$

(Xk şi Nk sunt statistic independente)

=> $I(X_k;Y_k)=h(Y_k)-h(N_k)$

Se arată că pentru o v.a. Y având o repartiție oarecare, dar dispersia aceeaşi, σ$^2$ avem:

$$h(Y)\le\frac{1}{2}\log_2(2\pi e\sigma^2)\begin{cases}<Y,\text{ are dispersia }\sigma^2\text{ dar altă repartiție decât cea gaussiană}\\=Y,\text{ are dispersia }\sigma^2\text{ şi repartiția este gaussiană}\end{cases}$$

# Teorema capacității informaționale

- Altfel spus, o v. a. de dispersia $\sigma^2$ dată are entropia diferențială maximă dacă are repartiție gaussiană.
- Dar această constatare nu rezolvă problema capacității:

$$C = I\left(X_k;Y_k\right) \text{ unde } \begin{cases} X_k \text{ este cu repartiție gaussiană} \\ E\{X_k^2\} = P \end{cases}$$

- Avem pentru dispersia lui Yk:

$$\mathrm{E}\left\{\mathrm{Y}_k^2\right\} = \mathrm{E}\{\mathrm{X}_k^2\} + \mathrm{E}\left\{\mathrm{N}_k^2\right\} = \mathrm{P} + \sigma^2 = \mathrm{P} + \mathrm{N}_0\mathrm{W}$$

# Teorema capacității informaționale

- Nk are dispersia $\sigma^2 = N_0 W$, rezultă că:

$$C = h(Y_k) - h(N_k) = \frac{1}{2}\log_2[2\pi e(P + N_0 W)] - \frac{1}{2}\log_2(2\pi e N_0 W)$$

Sau:

$$C = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right) \ [\text{biți}]$$

- în final avem:

$$C = W \cdot \log_2\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right) \qquad [\text{biți}/\text{sec.}]$$

- Dependența capacității de W are o componentă liniară, în timp ce dependența ei de puterea emisă P este logaritmică. În consecință se obține mai uşor o creştere a capacității crescând banda decât crescând puterea.

# Limita Shannon

- „sistem ideal” -> transmite la o rată de bit $R_b$ egală cu capacitatea informațională:

$$R_b = C \quad [\text{biți} / \text{sec.}]$$

- Puterea medie transmisă P funcție de energia pe bit $E_b$ pentru sistemul ideal: $P = E_b R_b = E_b C$
- Avem deci: $C = W \log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{C}{W}\right); \quad \frac{C}{W} = \log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{C}{W}\right)$
- sau $\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{\frac{C}{W}} - 1}{C/W}$

# Limita Shannon

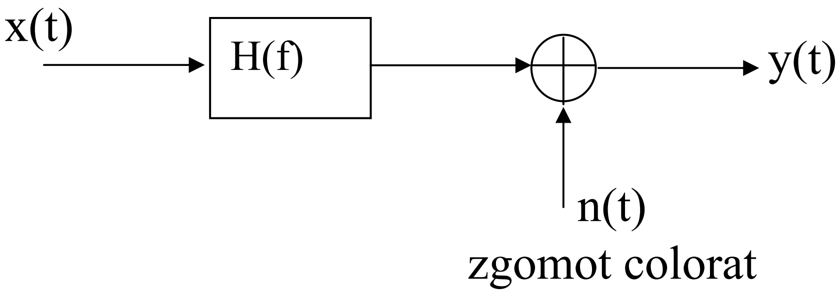
- Pentru o bandă infinită, raportul $E_b/N_0$ devine: (val. absoluta, decibeli)

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{W=\infty} = \lim_{W\to\infty} \frac{2^{\frac{C}{W}}-1}{\frac{C}{W}} = \ln 2 \qquad 10\log\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\infty} = 10\log(\ln 2) = -1{,}6\ [\mathrm{dB}]$$

- Limita corespunzătoare a capacității inferioare a canalului este:

$$C_\infty = \lim_{W\to\infty} W\log_2\left(1+\frac{P}{N_0 W}\right) = \frac{P}{N_0}\log_2 e = \frac{1{,}44P}{N_0} \qquad [\text{biți}/\text{sec.}]$$

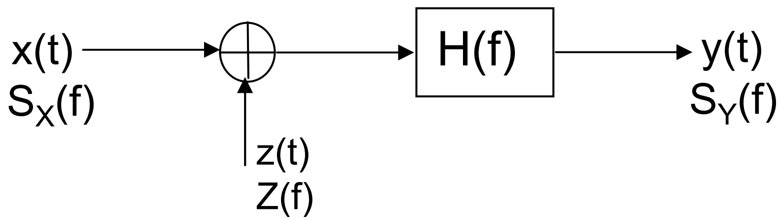
# Canale cu zgomot colorat



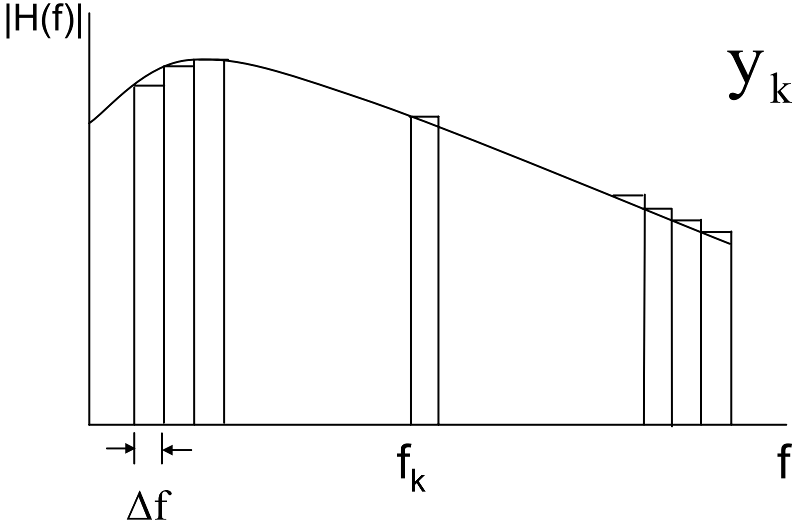

- Se formulează problema:

- Să se găsească densitatea spectrală de putere $S_X(f)$ ce maximizează informația mutuală intrare-ieşire, satisfăcând constrângerea ca puterea medie de intrare a semnalului să fie P.
- Să se determine capacitatea informațională optimă a acestui canal.

# Canale cu zgomot colorat




$$Z(f) = \frac{N(f)}{|H(f)|^2}$$

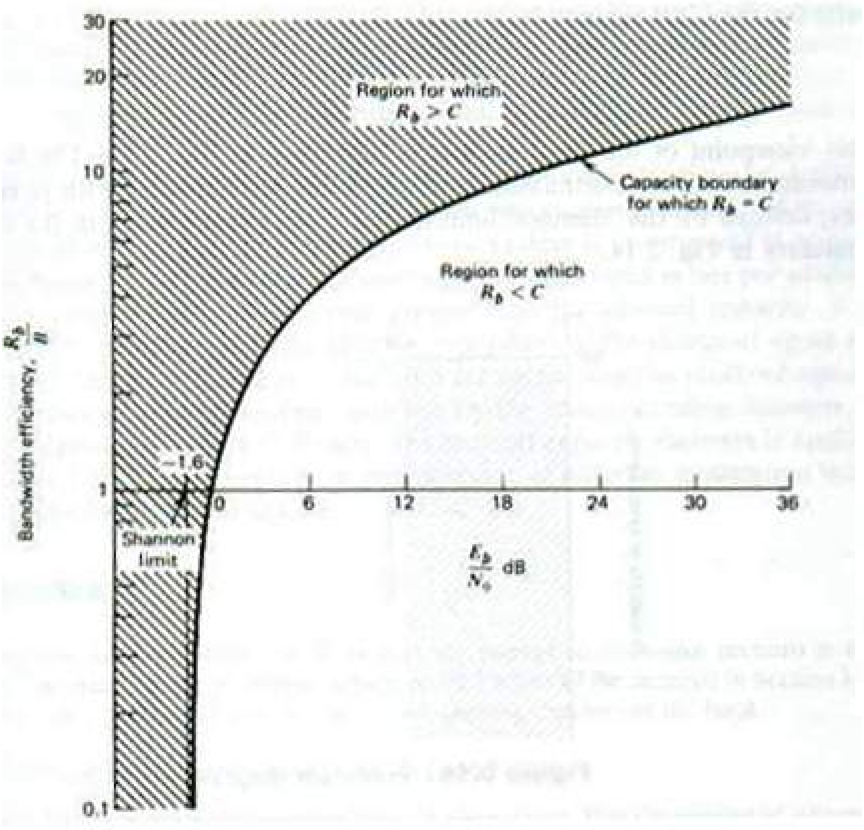


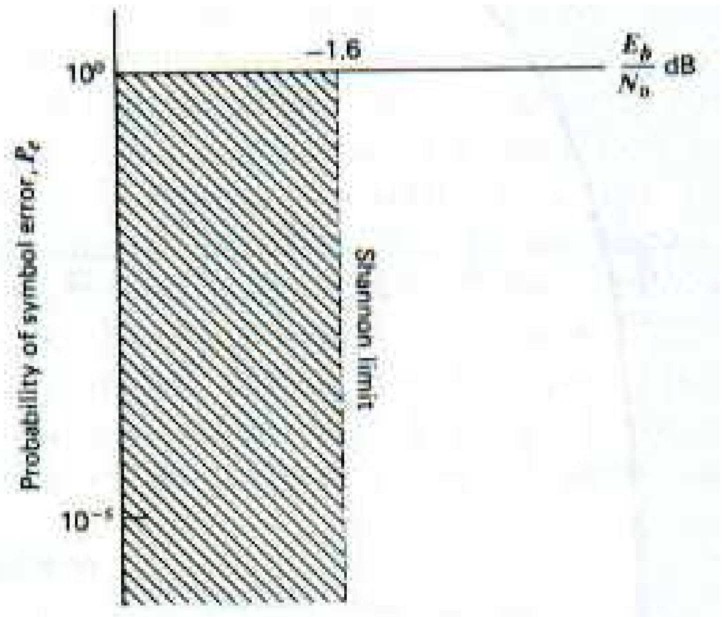

$$y_k(t) = x_k(t) + n_k(t), \quad k = 1,2,\ldots,N$$

- Puterea medie a semnalului de intrare în subcanalul k este:

$$P_k \cong S(f_k) \cdot \Delta f, \quad k = 1,2,\ldots,N$$

# Limita lui Shannon



# Canale cu zgomot colorat

- Dispersia zgomotului $n_k(t)$, corespunzător subcanalului k

$$\sigma_k^2 \cong Z(f_k)\cdot\Delta f = \frac{N(f_k)}{|H(f_k)|^2}\cdot\Delta f$$

- Capacitatea informațională a subcanalului k

$$C_k \cong \Delta f \log_2\left(1+\frac{P_k}{\sigma_k^2}\right)$$

- Cele N subcanale sunt independente unul de altul şi deci capacitățile lor informațională se însumează:

$$C \cong \sum_{k=1}^{N} C_k = \sum_{k=1}^{N} \Delta f \log_2\left(1+\frac{P_k}{\sigma_k^2}\right)$$

# Canale cu zgomot colorat

- Se caută maximul lui C după $P_k$ cu constrângerea de putere:

$$\sum_{k=1}^{N} P_k = P$$

$$J = \sum_{k=1}^{N} \Delta f \log_2\left(1 + \frac{P_k}{\sigma_k^2}\right) + \lambda\left(P - \sum_{k=1}^{N} P_k\right)$$

$$\frac{dJ}{dP_k} = \frac{\Delta f \log_2 e}{P_k + \sigma_k^2} + \lambda = 0, \quad k = 1,2,\ldots,N$$

# Canale cu zgomot colorat

- Pentru a obține o valoare $\lambda$ independentă de k putem lua:

$$P_k + \sigma_k^2 = K \cdot \Delta f, \quad k = 1,2,\ldots,N$$

unde K este o constantă, aceeaşi pentru orice k.

$$S_X(f_k) = K - \frac{N(f_k)}{|H(f_k)|^2}, \quad k = 1,2,\ldots,N$$

- Dar Sx($f_k$) este nenegativă deoarece este o densitate spectrală de putere. Este necesar să avem:

$$K \geq \frac{N(f)}{|H(f)|^2}$$

# Canale cu zgomot colorat

- Fie $W_e$ domeniul de frecvență în care K satisface condiția. Putem scrie:

$$S_X(f) = \begin{cases} K - \dfrac{N(f)}{|H(f)|^2}, & f \in W_e \\ 0, & \hat{\imath}n\ rest \end{cases}$$

- Puterea medie a semnalului de la intrare P

$$P = \int_{f \in We} \left( K - \frac{N(f)}{|H(f)|^2} \right) df$$

- Din această relație se determină K şi din precedenta $S_X(f)$ optim. Capacitatea se calculează cu:

$$C_{\max} = \sum_{k=1}^{N} \Delta f \log_2 \frac{K \Delta f}{\sigma_k^2} = \sum_{k=1}^{N} \Delta f \log_2 \frac{K |H(f_k)|^2}{N(f_k)}$$

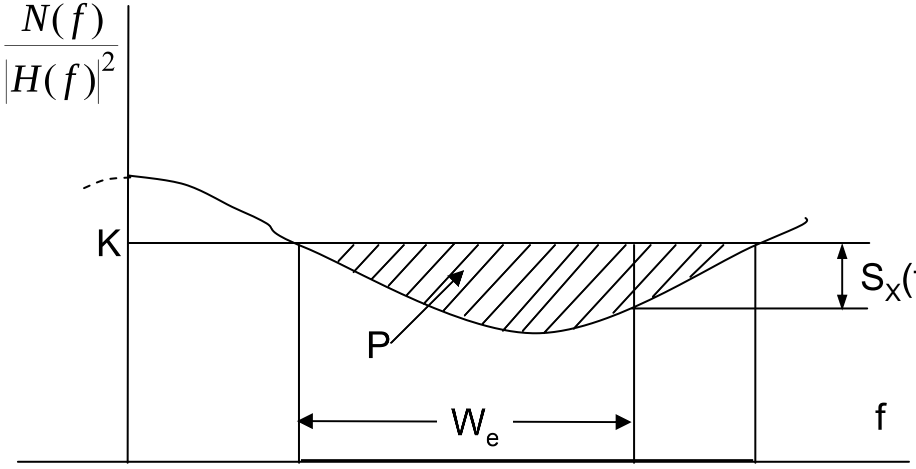
# Canale cu zgomot colorat

- sau, trecând la limită când $\Delta f \to 0$ şi $N \to \infty$:

$$C_{\max} = \int_0^{\infty} \log_2 \left[ K \frac{|H(f)|^2}{N(f)} \right] df = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \log_2 \left[ K \frac{|H(f)|^2}{N(f)} \right] df$$

# Water-filling

- În figură -> interpretare cunoscută sub numele de „**water-filling**”. Cantitatea de apă, echivalentă puterii se distribuie în relieful $\frac{N(f)}{|H(f)|^2}$ determinând valoarea K şi implicit domeniul $W_e$.
- Banda $W_e \leq W$ poate fi considerată o bandă echivalentă a canalului.



# Canalul selectiv afectat de zgomot alb

- Canalul este selectiv, |H(f)| nu este constant în banda W, dar zgomotul este alb, $N(f)=N_0=ct$. Se introduce raportul semnal/zgomot în banda echivalentă, $W_e$ ca fiind:

$$SNR_e = \frac{P}{N_0 W_e}$$

- Pentru o funcție f(x) oarecare dar pozitivă, se pot defini o medie geometrică $\overline{f}$ şi o medie geometrică generalizată $\overline{\overline{f}}$ prin:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad ; \quad \overline{\overline{f}} = \exp\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx$$

# Canalul selectiv afectat de zgomot alb

- Se poate arăta că pentru un canal selectiv afectat de zgomot alb este valabilă relația:

$$C_1 = W_e \log_2 \frac{SNR_e + \overline{|H(f)|^{-2}}}{\overline{|H(f)|^{-2}}}$$

# Canal neselectiv afectat de zgomot alb

- Este cazul canalului cu $|H(f)|=K$ şi $N(f)=N_0$. Banda echivalentă devine chiar toată banda canalului, $W_e=W$. Capacitatea se calculează cu:

$$C_2 = W\log_2\left(1+\frac{PK^2}{N_0 W}\right) = W\log_2\left(1+\frac{P_y}{N_0 W}\right)$$

- Aici , $P_y / N_0 W = SNR$ - raportul semnal pe zgomot la receptor.

# Canalul selectiv afectat de zgomot colorat

- Cu notația $SNR = P/N_0W$ capacitatea canalului în cazul general este:

$$C_3 = \int_{W_e} \log_2[1 + SNR|H(f)|^2]df$$